Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Integrazione Fratta

Caso generale:

Siano $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi:

$$\text{grado } P(x) = n \qquad \in \mathbb{N}$$
$$\text{grado } Q(x) = m$$

Come determinare $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$?

<u>Passo 1</u> Se $n \geq m$ allora procedere con la divisione Euclidea

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

con $A(x)$ e $R(x)$ polinomi con grado $R <$ grado Q

quindi ci riconduciamo ad un integrale fratto dove grado numeratore $<$ grado del denominatore

Passo 2 Decomporre il denominatore $Q(x)$

(ricordo il teorema di Gauss: ogni polinomio si può sempre decomporre nel prodotto di fattori di 1° grado o 2° grado irriducibile, con le rispettive molteplicità)

$$\boxed{Q(x) = q_0 (x-\alpha_1)^{p_1} \cdots (x-\alpha_h)^{p_h} \cdot (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1} \cdots (x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{s_k}}$$

Passo 3 Ricerca delle costanti

si cercano costanti tali che

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{1}{q_0}\left[\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \cdots + \frac{A_{1p_1}}{(x-\alpha_1)^{p_1}}\right] + \cdots + \left[\frac{A_{h1}}{(x-\alpha_h)} + \cdots + \frac{A_{hp_h}}{(x-\alpha_h)^{p_h}}\right]$$

$$+ \left[\frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1s_1}x+C_{1s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}}\right] +$$

$$\cdots + \left[\frac{B_{k1}x + C_{k1}}{x^2+\beta_k x+\gamma_k} + \cdots + \frac{B_{ks_k}x + C_{ks_k}}{(x^2+\beta_k x+\gamma_k)^{s_k}}\right]$$

Passo 4 Conclusione: usa la linearità dell'integrale, per ottenere la somma di integrali svolti nei casi precedenti.

Esercizio (1 Aprile 2026)

$$\int \frac{5x+1}{x^2+x-6}\,dx$$

Passo 1 non applicabile poiché grado num $\neq$ grado den

Passo 2 Decomporre denominatore

$\Delta = 1+24 = 5^2$ $\qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$ $\nearrow -3$, $\searrow 2$

$$x^2+x-6 = (x-(-3))\cdot(x-2) = (x+3)(x-2)$$

Passo 3 Ricerca costanti

$$\frac{5x+1}{x^2+x-6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x + (-2A+3B)}{x^2+x-6}$$

da cui

$$5x+1 = (A+B)x + (-2A+3B)$$

usando principio di identità tra polinomi

$$\begin{cases} A+B = 5 \\ -2A+3B = 1 \end{cases}$$

Risolvo:

$$\begin{cases} B = 5 - A \\ -2A + 3(5-A) = 1 \end{cases} \Rightarrow B = 5 - \frac{14}{5} = \frac{11}{5}$$

$$-2A + 3(5-A) = 1 \longrightarrow -5A = -14$$

$$A = \frac{14}{5}$$

Passo 4 Conclusione:

$$\int \frac{5x+1}{x^2+x-6}\,dx = \frac{14}{5}\int \frac{1}{x+3}\,dx + \frac{11}{5}\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \frac{14}{5}\lg|x+3| + \frac{11}{5}\lg|x-2| + c$$

Esercizio

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Passo 3 Ricerca delle costanti

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x+3)}$$

$$= \frac{A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)}{}$$

$(x+1)(x+2)(x+3)$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2C)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Da cui

$$1 = (A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2C)$$

$$\|$$

$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$$

Ossia

$$\begin{cases} A+B+C = 0 \\ 5A+4B+3C = 0 \\ 6A+3B+2C = 1 \end{cases}$$

$$C = -A-B \xrightarrow{2^e} 5A+4B+3(-A-B) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2A + B = 0 \quad \Rightarrow B = -2A$$

$$\xrightarrow{3^e} \cancel{6A} + 3(\cancel{-2A}) + 2(-A - \underbrace{(-2A)}_{B}) = 1$$

$$2A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}$$

$$B = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$D = -2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$C = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Passo 4 Conclusione

$$\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx + \int \frac{-1}{x+2}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+3}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\lg|x+1| - \lg|x+2| + \frac{1}{2}\lg|x+3| + \text{Cost}$$

Esercizio

$$\int \frac{x-1}{4x^3-x}\,dx$$

Passo 2 decompongo denominatore

$$4x^3 - x = x\,(4x^2-1^2) = x\,(2x-1)\,(2x+1)$$

Passo 3 Ricerca costanti

$$\frac{x-1}{4x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{2x+1}$$

$$= \frac{A(2x-1)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(2x-1)}{x(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{A(4x^2-1) + B(2x^2+x) + C(2x^2-x)}{4x^3-x} =$$

$$= \frac{(4A+2B+2C)x^2 + (B-C)x + (-A)}{4x^3-x}$$

Da cui

$$0x^2+1x-1 = (4A+2B+2C)x^2 + (B-C)x + (-A)$$

$$4A+2B+2C = 0$$

$$B-C = 1$$

$$-A = -1 \Rightarrow A=1$$

1^a $\quad 4+2B+2C=0 \Rightarrow B = \dfrac{-4-2C}{2}$

2^a $\quad \underbrace{\dfrac{-4-2C}{2}}_{B} - C = 1$

$$-2 - C - C = 1 \implies -2C = 3$$

$$\implies C = -\frac{3}{2}$$

$$B = -\frac{7}{2}$$

$$A = 1$$

Passo 3 Conclusione

$$\int \frac{x-1}{4x^3 - x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{7}{2}\int \frac{1}{2x-1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{2x+1}\,dx$$

$$= \log|x| - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{2}\log|2x-1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\log|2x+1| + \text{cost}$$

Esercizio

$$\int \frac{x^4+9}{x^2-5x+6}\,dx$$

Passo 1 Divisione Euclidea

$$x^4 + 9 \quad \Big| \quad x^2 - 5x + 6$$

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 \qquad \underbrace{x^2 + 5x + 19}_{A(x)}$$

(sottraggo) $5x^3 - 6x^2 + 9$

$$5x^3 - 25x^2 + 30x$$

$$19x^2 - 30x + 9$$

$$\begin{array}{l} 19x^2 - 95x + 114 \\ \hline 65x - 105 \end{array}$$

$R(x)$

Da cui:

$$\frac{x^4+9}{x^2-5x+6} = (x^2+5x+19) + \frac{65x-105}{x^2-5x+6}$$

$$\int \frac{x^4+9}{x^2-5x+6}\,dx = \int (x^2-5x+19)\,dx + \int \frac{65x-105}{x^2-5x+6}$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 5\,\frac{x^2}{2} + 19x\right) + \int \frac{65x-105}{x^2-5x+6}$$

A parte svolgo

$$\int \frac{65x-105}{x^2-5x+6}$$

Passo 2 Decomposizione denom.

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 6 = 1 \qquad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{array}$$

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

Passo 3   Ricerca costanti

$$\frac{65x-105}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$$= \frac{A(x-3)+B(x-2)}{x^2-5x+6} = \frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{x^2-5x+6}$$

$$\begin{cases} A+B = 65 \\ -3A-2B = -105 \end{cases}$$

$$\boxed{B = 65 - A}$$

2°

$$-3A - 2(65-A) = -105$$

$$-3A - 130 + 2A = -105$$

$$-A = 130 - 105 = 25$$

$$\boxed{A = -25}$$

$$\boxed{B = 90}$$

Da cui

Passo 4   Conclusione

$$\int \frac{65x-105}{x^2-5x+6} = -25\int \frac{1}{x-2}\,dx + 90\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= -25 \lg|x-2| + 90 \lg|x-3| + c$$

Quindi

$$\int \frac{x^4+9}{x^2-5x+6}\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 19x\right) - 25 \lg|x-2| + 90\lg|x-3| + \text{cost}$$

<u>Teorema</u> (2° sostituzione)

Sia $f:(c,d) \to (a,b)$ derivabile e <u>invertibile</u>

$g:(a,b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive

Allora $$\int g(x)\,dx = \left.\int g(f(t)) \cdot f'(t)\,dt\,\right]_{t=f^{-1}(x)}$$

<u>Commento</u>:

A differenza del 1° teorema sostituzione, dove abbiamo a che fare con $\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx$ (quindi $f(x)$ ci viene data subito), nel 2° teorema di sostituzione la $f(t)$ la dobbiamo scegliere noi! Questo significa anche che mentre il 1° teorema di sostituzione non è sempre utilizzabile, il 2° teorema di sostituzione possiamo sempre utilizzarlo (perchè la scelta di $f(t)$

ci fa scomparire dei blocchi fastidiosi)

Dim Per provare l'uguaglianza integrali utilizzo il principio doppia inclusione.

1ª inclusione $\int g(x)\,dx \subseteq \int g(f(t)) \cdot f'(t)\,dt \Big]_{t=f^{-1}(x)}$

Infatti, sia

$$G \in \int g(x)\,dx$$

sia $t = f^{-1}(x)$ (ricordo $x = f(f^{-1}(x))$)

$$G(x) = G(f(f^{-1}(x))) = G(f(t))$$

$$\Rightarrow (G(x))' = (G(f(t)))' =$$

$$= G'(f(t)) \cdot f'(t) =$$

$$= g(f(t)) \cdot f'(t)$$

$$\Rightarrow G \in \int g(f(t)) \cdot f'(t)\,dt \Big]_{t=f^{-1}(x)}$$

ossia $\int g(x)\,dx \subseteq \int g(f(t))\, f'(t)\,dt \Big]_{t=f^{-1}(x)}$

L'altra inclusione è gratis:

Sia $\boxed{H \in \int g(f(t)) \cdot f'(t)\, dt \Big]_{t=f^{-1}(x)}}$

Ma abbiamo già provato che ogni $G \in \int g(x)\, dx$

è anche $\boxed{G \in \int g(f(t)) \cdot f'(t)\, dt \Big]_{t=f^{-1}(x)}}$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : \quad H(x) = G(x) + c \in \int g(x)\, dx$

Suggerimenti sulla scelta della $f: (c,d) \to (a,b)$ derivabile e invertibile per applicare il 2° teorema sostituzione

1. $\int R(e^x)\, dx$

integrale dove e^x si ripete nelle operazioni (quindi voglio eliminarlo attraverso 2ª sost)

Usa $f(t) = \log t$ e applica 2ª sost

si ha

$$\int R(e^x)\, dx \overset{2^{\circ}\text{sost}}{=} \int R(t) \cdot \frac{1}{t}\, dt \Big]_{t=e^x}$$

$$\overset{\text{"}}{f^{-1}(x)}$$

Esempio

$$\int \frac{1}{e^x - 1}\, dx \overset{2^a\ sost}{=\!=} (*)$$

uso 2^a sost scegliendo $f(t) = \log t$ $\left(f^{-1}(x) = e^x\right)$

dove $g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

$$(*) = \int g(f(t)) \cdot f'(t)\, dt \Big]_{t=e^x} =$$

$$= \int \frac{1}{e^{f(t)} - 1} \cdot \frac{1}{t}\, dt \Big]_{t=e^x} =$$

$$= \int \frac{1}{e^{\lg t} - 1} \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{t}\, dt \quad t=e^x$$

siamo partiti da $\int \frac{1}{e^x - 1}\, dx$ e siamo arrivati ad un integrale fatto nella variabile t.

$$\int \frac{1}{(t-1)\cdot t}\, dt$$

$\int (t-1)\cdot t$

Passo 3 Ricerca delle costanti

$$\frac{1}{(t-1)\,t} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t} =$$

$$= \frac{At + B(t-1)}{(t-1)\,t} = \frac{(A+B)t - B}{(t-1)\,t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -B=1 \end{cases} \qquad A=1 \quad B=-1$$

Passo 4 Conclusione

$$\int \frac{1}{(t-1)\,t}\,dt = \int \frac{1}{t-1} - \int \frac{1}{t} =$$

$$= \lg|t-1| - \lg|t| \qquad t=e^x$$

Conclusione

$$\int \frac{1}{e^x-1}\,dx = \lg|e^x-1| - \lg e^x + c$$

$$= \lg|e^x-1| - x + c$$

Esercizio

Esercizio

$$\int \frac{x^5+4}{x^2+3x+2}\, dx$$

Passo 1 divisione euclidea

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+4 & x^2+3x+2 \\ \hline
x^5+3x^4+2x^3 & x^3-3x^2+7x-15 \\ \hline
-3x^4-2x^3+4 & \\
-3x^4-9x^3-6x^2 & \\ \hline
7x^3+6x^2+4 & \\
7x^3+21x^2+14x & \\ \hline
-15x^2-14x+4 & \\
-15x^2-45x-30 & \\ \hline
31x+34 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \frac{x^5+4}{x^2+3x+2} = (x^3-3x^2+7x-15) + \frac{31x+34}{x^2+3x+2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^5+4}{x^3+3x+2}\, dx = \int (x^3-3x^2+7x-15)\, dx + \int \frac{31x+34}{x^2+3x+2}\, dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + 7\frac{x^2}{2} - 15x\right) + \int \frac{31x+34}{x^2+3x+2}$$

A parte

$$\int \frac{31x+34}{x^2+3x+2}\,dx$$

$$\Delta = 9-8=1 \longrightarrow x_{1,2} = \frac{-3\pm 1}{2} \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\frac{31x+34}{x^2+3x+2} = \frac{31x+34}{(x+2)(x+1)} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)x + (A+2B)}{(x+2)(x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B = 31 \\ A+2B = 34 \end{cases} \longrightarrow B = 31-A$$

2^e $\quad A+2(31-A) = 34$

$$-A + 42 = 34$$

$$-A = 34-42 = -8$$

$$A = 8$$

$$B = 31-8 = 23$$

$$\Rightarrow \int \frac{31x+34}{(x+2)(x+1)}\,dx = 8\int\frac{1}{x+2} + 23\int\frac{1}{x+1} =$$

$$= 8 \lg|x+2| + 23 \lg|x-12| + \underline{\underline{cost}}$$